"Elhuyar", "Elhuyaw", "Elhuyww" bereizi: Semiordenak

Esteban Indurain Eraso
Analisi Matematikoa saileko katedraduna eta Matematika mintegiko burua, NUP

F. Javier Abrisqueta Usaola
Askatasuna BHI institutuko Matematika irakaslea eta NUPeko Analisi Matematikoa sailean irakasle laguna

Interneteko bilatzaile batean "Elhuyaw" (sic) idatziko bagenu, berehala "Agian 'Elhuyar' idatzi nahi izan duzu" mezua aterako litzaiguke eta, ondoren, "Elhuyar" hitzari dagozkion erreferentziak gure begien aurrean agertuko lirateke. Oraingoan, helburu berarekin, "Elhuyww" idatziko bagenu, bilatzaileak, berehala oraingoan ere, "Ez da aurkitu emaitzarik" mezuarekin erantzungo liguke."Elhuyaw" eta "Elhuyar" hitzak letra batek desberdintzen ditu; aldiz, "Elhuyar" eta "Elhuyww" hitzak bi letratan desberdintzea izan daiteke erantzun desberdina jaso izanaren arrazoia.

Agian, bilatzaileak bi hitzen artean letra bateko desberdintasuna dagoela antzemateko programa berezi bat du, eta, honenbestez, "Elhuyaw" idatziz gero, akats bat izan dela konturatu da, eta "Elhuyar" idatzi nahi izan dugula suposatu du. Era berean, bilatzailea ez da gai "Elhuyww" idatzi ondoren akats bat dela suposatzeko, bi letrako desberdintasuna dutelako.

Beharbada bilatzaileak pertzepzio-atalase bat (*Umbral de percepción*, gaztelaniaz; *threshold*, ingelesez) izatea gerta daiteke, hau da, letra batean gehienez bi hitz desberdintzen badira programak bereizezinak balira bezala irakurtzen ditu eta "Agian ..." mezua plazaratzen du; bi letra edo gehiago gaizki idazten baditugu, ordea, zerbait desberdina bilatzen ari garela ulertzen du: "Elhuyar" eta "Elhuyww" desberdinak dira, baita emaitzak ere. Ikus dezagun adibide honetako hitzen arteko bereizezintasun-erlazio hori ez dela iragankorra: "Elhuyar" eta "Elhuyaw" desberdinezinak dira (letra batean desberdintzen direlako). Arrazoi bera dela eta, "Elhuyaw" eta "Elhuyww" desberdinezinak dira, baina "Elhuyar" eta "Elhuyww" hitzak desberdintzen ditu, eta horrela jarduten du ordenagailuak.

Sarrera honekin, "Ordenaren Matematika"ri buruzko ikerketa-taldekook (NUP, Iruñea), MTM2007-62499 ikerketa proiektuaren diru-laguntzaz, azken urteotan lantzen ari garen atal txiki bat plazaratu nahi genuke: aukeren edo alternatiben arteko konparaketak, bereizezintasun ez-iragankorrak eta pertzepzio-atalaseak erlazionatzen dituena, gure azken ikerketen oinarrizko kontzeptua, semiorden izenekoa. Besteak beste, sareko nabigatzaileetan bilatzaile-programen konfigurazioa ezartzea du erabilpenetako bat.

Sailkapen bat egiten badugu elementuak desberdintzean, pertzepzio-atalase kontzeptua agertuko zaigu. Batzuetan, zaila da zehaztea. Irudian dauden kobrezko bi txanponak, adibidez, Caskanten egindakoak dira. 14. eta 36. urteen artean Nafarroan egindako txanponen erakusketa batean aurkezteko baliagarriak izango lirateke, baina Caskanten egindako txanponen ezaugarriak aztertzeko bigarrenak ez luke balioko, zati bat falta duelako. Edo, erabili dezakegu, falta zaion zatia hain handia ere ez da eta? Edozein egoeratan, pertzepzio-atalasea zehaztu beharreko muga da.

Hastapen historikoa kontuan izanik, kontzeptu hori N. Wienerren 1914ko lan batean agertzen da inplizituki. Urte batzuk geroago, 1956an, R. D. Lucek, ekonomia-alorrean (ber)erabili zuen aukera- edo alternatiba-konparaketen egoerak aztertzeko eta erabakiak hartzeko, non bereizezintasun ez-iragankorra duten egoeretan lehentasunak finkatu behar dituzten eragileek parte hartzen duten. R. D. Luce egileari dagokio "semiorden" izena (*semiorder*, ingelesez; *quasi-ordre* frantsesez)...

LEHENTASUNEZKO SISTEMAK ETA SEMIORDENAK

Aukera-multzo bat aztertzen ari garela, aukeren arteko bi erlazio atzematen dira; bi aukera badauzkagu, bata bestea baino egokiagoa, gustukoagoa edo desiragarriagoa izango da. Baina, antzekoak ere izan daitezke. Kasu horretan, berdin zaigu bata zein bestea, ez baitugu bereiziko. "Egokiagoa izan" eta "bereizezina izan" erlazioen propietateak aztertuko ditugu semiorden egituraren definizioa lortzeko. X aukera- edo alternatiba-multzo bat izanik eta P, I multzo horretan definitutako bi binakako erlazio badira, [P, I] erlazio-bikotea lehentasunezko sistema bat izatea honela ulertuko dugu: P erlazioa lehentasun zehatzak (egokiagoa izan) adierazteko erabiliko dugu eta I erlazioa bereiziezintasuna adierazteko.

Hau da, x eta y X multzoko bi aukera edo alternatiba badira, eta x aukera y aukera baino gustukoagoa badugu (xPy idatziko dugu), halabeharrez ezin da izan y aukera x aukera baino gustukoagoa (xPy bada ezinezkoa da yPx); beraz, P-k asimetrikoa izan beharko du. Gerta daiteke x eta y aukerak edo alternatibak berdinak izatea, baina, arazo hori P irreflexiboa izanda gaindituko dugu (x alternatiba bat bada, ezinezkoa da xPx). Bestalde, I erlazioak erreflexiboa izan behar du, hau da, xIx; x aukera bat bada, ezin du bere burua desberdindu. Gainera, I erlazioa P erlazioa dugunean definituko dugu, ez alderantziz. Horrekin hau adierazi nahi dugu: bi aukera bereizezinak izango dira eta xIy

idatziko dugu ez bada *xPy* ezta *yPx* ere. I-k badu beste propietate bat ere: simetrikoa da (*xIy* bada, *yIx* da).

Semiorden kontzeptua definitzeko gai gara gaur egun; ez dugu erabiliko, beraz, R. D. Lucek erabili zuena, guztiz teknikoa baita: Aleskerov *et al.* (2007) lanaren 3.2 kapituluan agertzen dena erabiliko dugu.

X multzoan [P, I] lehentasunezko sistema definituta badago, P lehentasun-erlazio zehatza semiorden bat dela esango dugu, *x; y; z; t* X multzoko edozein lau elementuk bi baldintza hauek betetzen badituzte:

1. *xPy; yIz; zPt* beteko balitz, *xPt* bete beharko litzateke. (PIP → P)
2. *xPy; yPz; zIt* beteko balitz, *xPt* bete beharko litzateke. (PPI → P)

PERTZEPZIO-ATALASEAK

Semiordenen definizioan ez da agertzen zuzenean pertzepzio-atalasea, baina, bereizezintasun ez-iragankorrak erakusten digu beharrezkoa dela, sarrerako adibidean “Elhuyar” I “Elhuyaw” I “Elhuyww”, baina, “Elhuyar” P “Elhuyww” dela ikusi dugu eta suposatu dugu letra desberdinen kopurua bat baino handiagoa bada bereizi egiten direla. Aukeratu ahal ditugunen eta bereizezinak diren arteko muga konstantea landuko dugu. Lucek bere jatorrizko artikuluan ideia kontuan hartu zuen arren, Scott eta Suppes izan ziren, 1958 urteko lan batean, kontzeptua zuzenean aztertu zutenak. Lan horretan, multzo finituetan definitutako semiordenei buruzko emaitza oso garrantzitsua frogatu zuten:

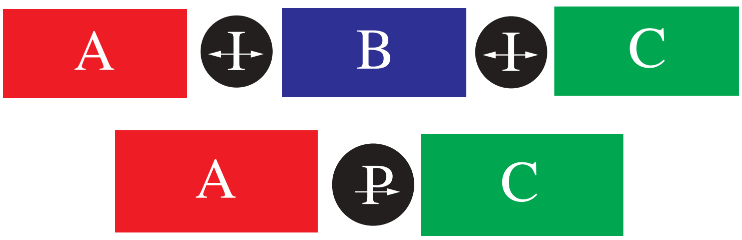
Scott-Suppes Teorema [1958]: *X multzo finitu bat eta P erlazioa X multzoan definitutako semiorden bat izanik, orduan X multzoan definitutako eta balio errealak hartzen dituen F funtzio bat existitzen da, non x eta y bi alternatiba badira, x y baino gustukoagoa da, baldin eta soilik baldin* $F(x)+1 < F(y)$ *betetzen bada.*

Oinarrizko teorema horren esanahia arretaz begiratzen badugu, P semiordena, aukeren arteko konparaketetan oinarritua dagoena, eta aukeren lehentasunak hautatzen ditugun gehienetan eskala kuantitatiboan definituta dagoena, eskala kualitatibo edo zenbakizkora igarotzen dela konturatuko gara. Hau da, X multzoko *x* aukera bakoitzari, F funtzioaren bidez, F(*x*) zenbakia dagokio, (eta *y*-ri F(*y*)); horrela, F(*x*) eta F(*y*) zenbaki errealak konparatuz *x* alternatiba *y* baino gustukoagoa dugun ala ez jakin dezakegu. P lehentasun hori pertzepzio-atalase konstante batek finkatzen du: Scott-Suppes Teoreman pertzepzio-atalasea zenbaki bat da. Ohartuko gara *x y* baino desiragarriagoa dela, baldin eta soilik baldin F(*y*) – F(*x*) pertzepzio-atalasea bat baino handiagoa bada. Baina, balio absolutuan, F(*y*) – F(*x*) bat baino txikiagoa bada, orduan *x* eta *y* aukerak bereizezinak direla esan beharko dugu.

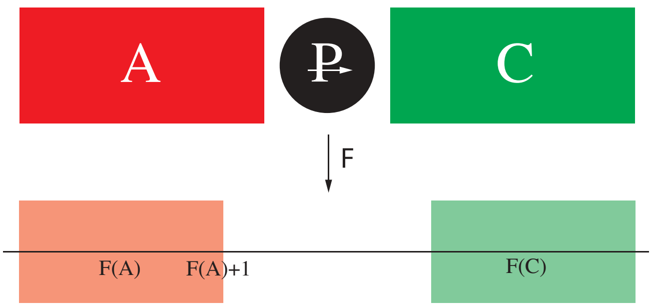
Ordenaren Matematika lantzeko, ezinbestekoa da horrelako itzulpenak eskura izatea, eskala kualitatibotan dauden ordenazio-motak (semiordenak, adibidez), baliokideak diren eskala kuantitatiboetan. Hau da, ohikoa den zenbakien arteko handiagoa eta txikiagoa erlazioaren bidez ezagutzea eta ez era kualitatiboan multzo batean definitutako aukerak (binakako erlazio baten edo ordenazio baten bidez definitutakoak). Scott-Suppes-en Teoremak multzo finitu batean semiorden eskalak zenbakizko eskala bihurtzen ditu F funtzioari eta pertzepzio-atalase konstante baten bidez.

ZENBAKIZKO ADIERAZPENAREN PROBLEMA

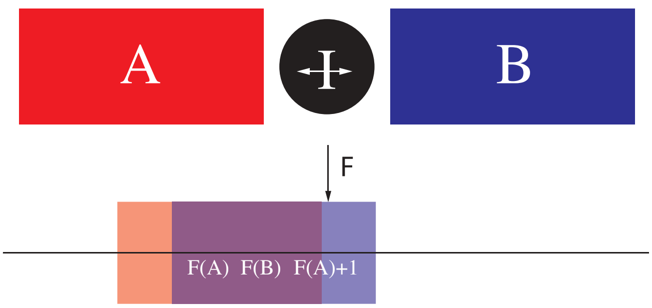
Atarian plazaratu dugun emaitza (Scott-Suppes Teorema), X multzo finituetan P izeneko semiorden bat F funtzio baten eta pertzepzio-atalase baten bidez adierazgarria izan daitekeela dioena, ez da betetzen multzo infinituetan. Horrenbestez, multzo infinitu batean definitutako P semiorden bat Scott-Suppes-en eran adierazgarria dela esango dugu, F funtzio baten eta pertzepzio-atalase baten bitartez adierazi badezakegu:



Bereizezintasun ez-iragankorra: Gorriaren (A) eta urdinaren (B) artean berdin zait zein aukeratu; A I P, urdinaren (B) eta berdearen (C) artean, gauza bera, B I C, baina gorriaren eta berdearen artean gustukoa dut gorria A P C.



Eskala kualitatiboan A aukera C aukera baino gustukoagoa badut, A P C idatziko dugu; aukeraketa hori eskala kuantitatibora eramaten badugu, F, F(A)+1<F(C) beteko duen funtzio bat erabiliko dugu.



A eta B aukerak bereizezinak badira eskala kualitatiboan, A I B idatziko dugu; F funtzioaren bidez zenbakietara eramaten badugu A eta B aukeren irudiak F ren bidez, balio absolutuan, F[A] –F[B] balioak bat baino txikiagoa izan behar du.

F funtzioa X multzoan definituta dagoenean balio errealak hartzen dituenean eta x eta y bi alternatiba ditugunean xPy da, baldin eta soilik baldin $F(x) + 1 < F(y)$ bada.

Orain, egoera orokor horretan, X multzo batean (infinitu elementu dituena, halabeharrez) definitutako P semiordenak daude, horrelako adierazpenak onartzen ez dituztenak. Horientzako ez da posible Scott-Suppes-en eran adierazpen bat aurkitzea, F funtzio egoki bat eta pertzepzio-atalase konstante bat lortzea. Nahiko erraza da adibide hauek adieraztea; adibidez: X multzo batean $x(n)$ segida bat badugu non elementu bakoitza hurrengoa baino gustukoagoa den ($x(n)Px(n+1)$ n zenbaki arrunt guztietarako) eta x^* elementu bat badago, zeinak $x(n)P\,x^*$ betetzen duen gai guztietarako (segidako elementu guztiak bera baino gustukoagoak dira), egoera horretan ezinezkoa da Scott-Suppesen eran adierazpen bat ematea. Abrisqueta *et al.* (2009) lanean era askotako adibideak agertzen dira.

Teoria horren gakoa planteatzeko momentua iritsi zaigu. Honatx semiordenen zenbakizko adierazpenaren problema: zein dira X multzo batean definitutako P semiorden baten ezaugarriak P semiorden hori Scott-Suppesen eran adierazgarria izan dadin? Hamabost urte daramagu ikerketa-talde batzuetan problema hau aztertzen. Emaitza orokorren bat lortu izan dugun arren, oso teknikoa da hemen azaltzeko. Gai honi buruzko informazio gehiago izateko, interesgarria da Abrisqueta *et al.* (2009) erreferentziako artikulua, non problema honen inguruan egin denaren nondik norakoak aztertzen diren.

Oro har, lehen esan dugunez, egitura ordenatuen zenbakizko adierazpenak lortzea da Ordenaren Matematikaren adar aktibo baten buruhaustea, zehazki egitura ordenatuen zenbakizko adierazpenak lortzea. Eskala kualitatibo bat ulertarazi dezakegu eskala kuantitatibo baten bidez. Egitura horien artean, semiordenak izan dira, dudarik gabe, Scott-Suppesek bere lana aurkeztu zuenetik, problemarik zailena. Beste egitura ordenatu batzuetan eskala kualitatibotik eskala kuantitatibora dagoen jauzia orain dela zenbait urtetik egina dago. Semiordenetan lortu diren erantzunek garapen zaileko abstrakzio-maila altua behar dute. Agian, sinplifikatu egin beharko genituzke, gaur egun ditugunak baino erantzun alternatibo berri errazagoak bilatzen saiatuz. Horretan ari gara.●

BIBLIOGRAFIA

Abrisqueta, F.J.; Candeal, J.C.; Indurain, E.; Zudaire, M.: "Scott-Suppes representability of semiorders: Internal conditions". *Math. Social Sci.* 57 245-261 (2009).

Aleskerov, F.; Bouyssou, D.; Monjardet, B.: Utility maximization, Choice and Preference. Springer, Berlin (2007).

Luce, R.D.: "Semiorders and a theory of utility discrimination". *Econometrica* 24 178-191 (1956).

Scott, D.; Suppes, P.: "Foundational aspects of theories of measurement". *J. Symbolic Logic* 23 113-128 (1958).

Wiener, N.: "Contribution to the theory of relative position". *Math. Proc. Cambrige Philos. Soc.* 17 441-449 (1914).